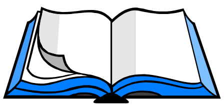
Studieanvisning till

Matematik 3000 kurs D

ISBN 91-27-51028-X



Förord

Vår ambition med denna studiehandledning är att den skall guida dig genom boken Matematik 3000 kurs D/Komvux av Lars-Eric Björk, Hans Brolin och Roland Munther. Vi beskriver kortfattat vad kapitlen handlar om och när det är dags att skicka in kursens fem studiearbeten. Viktiga begrepp som du måste förstå är understrukna. Gör gärna en egen liten ordlista där du med egna ord skriver ner vad dessa begrepp betyder.

Lycka till med studierna önskar matematiklärarna på Nationellt centrum för flexibelt lärande.

Hur använder jag kursboken?

- Titta i innehållsförteckningen och skaffa dig en överblick över vilka moment som ingår i kursen. Förutom det som finns i boken ingår det i kursen att göra ett fördjupningsarbete i matematik. Ta kontakt med din lärare redan nu för att bestämma med vad och hur du skall arbeta.

- Läs sedan ”Till lärare och elever” före innehållsförteckningen. Där skriver författarna hur boken är upplagd och hur de har tänkt att boken ska användas. Som du ser är övningsuppgifterna uppdelade i tre svårighetsnivåer, A, B och C. För betyget godkänt, kan det räcka med att klara alla A-uppgifter och några av B-uppgifterna. Det finns inga skarpa gränser mellan lätta, medelsvåra och svåra uppgifter. Indelningen stöder sig främst på antalet tankesteg som behövs för att finna lösningen ("svaret"). Eftersom ”svårighetsgrad” uppfattas olika av olika personer så prova C-uppgifterna oavsett vilka betygsambitioner du har.

- Gör nu en personlig tidsplan för dina studier: När tänker du starta kursen och när skall du avsluta kursen. Däremellan skall du göra insändningsuppgifterna och skicka dem till din lärare. Kom ihåg att planera in tid till repetition också.

Sedan är det dags att ta itu med räknandet. Då du börjar med ett nytt kapitel i boken (moment i kursen) gör du så här.

- Läs **sammanfattningen** i slutet av kapitlet för att få en mer konkret bild av vad du ska kunna när kapitlet är klart och **tipsen** i detta häfte som guidar dig igenom det som oftast kan upplevas som besvärligt i boken. Varje kapitel innehåller ett antal färdiglösta exempel i **blå text**. Studera dem noga och hör av dig till din lärare om du inte förstår dem.

- Gör uppgifterna som finns i boken. Om du tycker att det är lätta uppgifter och/eller för mycket likadana uppgifter så gör bara varannan eller var tredje uppgift så att du kommer framåt. Räkna sedan de överhoppade övningarna när du repeterar. Ta kontakt med din lärare om du inte förstår hur man kommer fram till det svar som finns i bokens facit

- Efter sammanfattningen finns *Blandade övningar*. Spara med att göra dem tills det börjar bli dags för examinationen. När man repeterar är det bra att lösa några nya uppgifter som man inte sett förut.

De uppgifter som finns under rubriken "Problemlösning" är bra övningar. Lös några sådana lite nu och då under kursens gång.

Problemlösning

Allmängiltig strategi

Exempel

En stor bulle kostar 2 kr mer än en liten bulle. Hur mycket kostar en liten bulle om sju små kostar lika mycket som fem stora?

1. **Förstå problemet**.

   - Vad söks?
   - Vad är givet?
   - Verkar problemet rimligt?
   - Rita en figur om det går.
   - Inför lämpliga beteckningar.

Du skall ta reda på vad en liten bulle kostar. Det är givet att en stor kostar 2 kr mer än en liten och att 7 små bullar kostar lika mycket som 5 stora.
Problemet verkar rimligt.
Pris för liten bulle: x kr
Pris för stor bulle: y kr

2. **Gör upp en plan**.

   - Har du sett detta tidigare?
   - Har du löst något liknande förut?
   - Kan du dela in i delproblem?
   - Kan du lösa eventuella delproblem?
   - Saknas det fakta?
   - Var kan du finna fakta som saknas?

Skriv ut vad som söks:
Sökt: x
Skriv ner de matematiska sambanden mellan x och y som du känner:
$y = x + 2$ (1)
$7x = 5y$ (2)
Eftersom vi har två obekanta och två ekvationer bör detta gå att lösa.
Sätt in uttrycket för y som finns i ekvation (1) i ekvation (2).

3. Genomför planen.
- Kontrollera varje steg.
- Stryk under resultat.
- Fungerar det ej gör du upp en ny plan.

$7x = 5y = 5(x+2)$
$7x = 5x + 10$
$2x = 10$
$\underline{x = 5}$
Planen verkade fungera, vi har räknat ut att en liten bulle kostar 5 kr.

4. Se tillbaka. **Glöm inte detta steg!**

- Är resultatet rimligt?
- Kan man lösa problemet på ett annat sätt?
- Är resultatet eller metoden användbar i andra sammanhang?

Det verkar rimligt att en liten bulle kostar 5 kr. För att vara riktigt säker fortsätter man sina beräkningar.
Sätt in $x = 5$ i ekvation (1) -> $\underline{y = 7}$
Sätt in $x = 5$ och $y = 7$ i ekvation (2). ->
$\underline{7x = 35 = 5y}$
Eftersom VL = HL har vi räkna rätt.
<u>Svar: En liten bulle kostar 5 kr</u>.
Metoden är alltid användbar då man löser linjära ekvationssystem med två obekanta.
Det finns fler sätt att lösa detta problem.

Studieenhet Triangelsatserna

1.1 Från rätvinkliga till godtyckliga trianglar

Detta avsnitt ger en välbehövlig repetition av begrepp som är förknippade med rätvinkliga trianglar: de trigonometriska funktionerna: *tangens* för en vinkel ($\tan v$), *sinus* för en vinkel ($\sin v$) och cosinus för en vinkel ($\cos v$). Glöm inte att repetera *Pytagoras sats* som alltid är aktuell när det handlar om rätvinkliga trianglar.

Se upp med inställningen av din miniräknare så att den är inställd på rätt vinkelenhet: grader (360°), nygrader (400^g) eller radianer (2π radianer). Det är främst måtten *grader* (Eng. degree) och radianer ("det mest matematiska vinkelmåttet") som du kommer att använda.

I denna kurs är det av största vikt att du är väl förtrogen med vinkelmåttet *radian* då många beräkningar av derivator och integraler endast funkar om man mäter/anger vinklar i radianer. Vinkelmåttet radianer tas upp i kapitel 2.2. Du kan läsa om radianer redan nu men du kan vänta med att lösa de uppgifter som finns där.

Det kan vara besvärligt att avgöra hur de *grafiska* miniräknarna är inställda, ty inställningen (DEG, RAD) är inte synligt i "fönstret" (som det är i på de enklare funktionsräknarna), utan man måste se efter i "SET UP" (Casio) respektive "MODE" (Texas Instrument) vilken vinkelenhet som är inställd.

1.2 Triangelsatserna

Vinkelbegreppet kan generaliseras och omfatta både mått som är större än 360° och mått som är mindre än *0*°. Om man vill beskriva hur vridningsvinkeln ökar då en fritt roterande axel snurrar – t.ex. i en bilmotor – kan ju vridningsvinkeln uppgå till helt enorma talvärden. Men fortfarande kan man använda sig av de trigonometriska funktionerna för att beskriva i vilket läge axeln befinner sig i förhållande till utgångsvinkeln *0*°. I all matematik utgår man vid vinkelmätning på roterande system från riktningen rakt till höger från rotationscentrum och anger sedan vinkeln som *positiv* då vridningen sker *moturs* och *negativ* då den sker *medurs* (kanske inte så logiskt, men internationellt helt standardiserat och accepterat).

Med så här stora eller 'små' (negativa) vinklar räcker inte de definitioner av de trigonometriska funktionerna som gavs i tidigare kurs, utan *cosinus*, *sinus* och *tangens* för en vinkel definieras med utgångspunkt från *enhetscirkeln*.

Nu är det dags att göra Test 1:1. Om det går bra gör du studiearbete 1 och skickar till din lärare, annars tränar du lite mer innan du gör det första studiearbetet.

Plats för egna anteckningar och frågor:

Studieenhet Trigonometri

1.3 Trigonometriska formler

Det finns ganska många trigonometriska formler i boken. Du bör försöka lära dig de vanligaste utantill. T.ex. trigonometriska ”ettan”, additions- och subtraktionsformlerna samt formlerna för dubbla vinkeln:

$sin(u + v) = sin\,u \cdot cos\,v + cos\,u \cdot sin\,v$	$sin\ 2u = 2 \cdot sin\,u \cdot cos\ u$
$sin(u - v) = sin\,u \cdot cos\,v - cos\,u \cdot sin\,v$	$cos\ 2u = cos^2 u - sin^2 u$
$cos(u + v) = cos\,u \cdot cos\,v - sin\,u \cdot sin\,v$	
$cos(u - v) = cos\,u \cdot cos\,v + sin\,u \cdot sin\,v$	$sin^2 u + cos^2 u = 1$

1.4 Trigonometriska ekvationer

Då du löser trigonometriska ekvationer är enhetscirkeln ett ovärderligt hjälpmedel för att finna samtliga lösningar till en trigonometrisk ekvation. Skissa ofta en enhetscirkel på ditt kladdpapper och fundera på vilka vinklar som kan ge ett och samma trigonometriska funktionsvärde. Tekniken behandlas på sidorna 60 – 63, ”Trigonometriska grundekvationer”.

Gör nu test 1:2A och fortsätt framåt i boken om det gick bra.

2.1 Trigonometriska kurvor

Du bör öva att rita några trigonometriska kurvor för hand. Sedan är det en stor tidsbesparing om du använder din grafritande räknare eller ett PC-program för att rita trigonometriska (och andra!) funktionskurvor.

Om man för hand skall rita kurvan till den trigonometriska funktionen:

$$y = a \cdot sin\,x + b \cdot cos\,x \qquad a,\ b > 0 \qquad (1)$$

Låter det sig göras om man förs ritar funktionen $y_1 = a \cdot sin\,x$ och sedan $y_2 = b \cdot cos\,x$ i samma diagram. Då gäller förstås att $y = y_1 + y_2$ och man kan konstruera fram den slutliga funktionsgrafen genom att addera amplituderna från y_1 och y_2 för att pricka in y:s amplitud. För grafritaren (miniräknare eller dator) tycks det inte vara någon svårighet att rita denna sinusfunktion på en gång. Vi kan också ta fram ett enklare funktionssamband för denna funktion om vi omvandlar *(1)* så här:

$$y = a\,sin\,x + b\,cos\,x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot sin(x + v) \quad \text{där } v = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (2)$$

Att detta alltid är möjligt och hur man härleder sambanden finner du på sidorna 84 – 85 Sambandet finns också i din formelsamling.

Gör test 2.1A. Går det bra gör du studiearbete 2 och fortsätter framåt i boken, om det inte går bra tränar du mer och tar kontakt med din lärare.

Plats för egna anteckningar och frågor:

Studieenhet Derivator

2.2 Radianbegreppet

Radianer som vinkelmått är helt nödvändigt för att kunna beräkna derivator och integraler av trigonometriska funktioner. Det gamla traditionella vinkelmåttet är ett helt godtyckligt sätt att indela ett helt cirkelvarv (i 360 delar). Det var praktiskt för forna tiders kalendermatematiker och astronomer. Radianmåttet är faktiskt mer verklighetsförankrat. Man mäter helt enkelt omkretsen på en enhetscirkel. Eftersom enhetscirkelns radie är precis $r = 1{,}0$ *längdenheter* blir omkretsen = $2\cdot\pi r = 2\cdot\pi 1{,}0 = 2\pi$

Vi får alltså sambandet $360° = 2\pi$ *radianer* eller $180° = \pi$ *radianer*

Märk: Du måste se upp med miniräknarens inställning när du omväxlande räknar med grader och med radianer!

2.3 De trigonometriska funktionernas derivator

Att derivera trigonometriska funktioner är inte särskilt svårt ty: $y = \sin x$ har $y' = \cos x$ som sin "lutningsbeskrivare" och $y = \cos x$ har $y' = -\sin x$ som lutningsbeskrivande funktion (= derivata). Om den trigonometriska funktionen har ett vinkelargument som är en funktion av den oberoende variabeln, tillkommer en inre derivata; man tillämpar kedjeregeln.

Exempel 1: Derivera funktionen $y = \cos 3x$
Lösningen är $y' = (-\sin 3x)\cdot 3 = -3\sin 3x$ där den sista faktorn *"3"* är derivatan av $3x$ *;* den s.k. *inre derivatan*

Exempel 2: Derivera funktionen $y = \sin (x/5)$
Lösningen är $y' = \cos(\frac{x}{5})\cdot\frac{1}{5} = \frac{\cos(x/5)}{5}y'$ med inre derivatan 1/5

Det är nu dags att göra test 2:2A i boken.

3.1 Derivator och deriveringsregler

Begreppet "andraderivata" införs här. Det finns förstås även tredje- och fjärdederivata o.s.v. av vissa funktioner (exempel: exponentialfunktioner och trigonometriska funktioner har hur många derivator som helst! Medan polynomfunktioner bara har så många derivator som polynomets grad anger). Beteckningen $f'(x)$ eller y' respektive f'' eller y'' härrör från Isac Newton medan beteckningen dy/dx respektive d^2y/dx^2 hittades på av W. G. Leibniz. I matematikkursen C har du lärt dig att derivera och i bästa fall förstå vad derivatan kan användas till.

Här i kurs D får du lära dig resten om derivatornas stora betydelse i matematiken. Framförallt kan du nu lära dig hur man deriverar en produkt och en kvot av två funktioner. Att kunna metoden med produktderivering är bl.a. en förutsättning för att kunna lösa vissa differentialekvationer (som förekommer i kurs E). Se upp med skillnaden mellan *summor av* *funktioner* och *produkter av funktioner*. Summor (och differenser) av funktioner är lätthanterliga, ty varje term kan deriveras respektive integreras var för sig, medan produkter (och kvoter) av två funktioner fungerar på helt annat sätt. Man måste kunna *produktderivering* och *kvotderivering*. Reglerna finns visserligen i formelsamlingar, men man måste öva för att finna reglerna och förstå tillämpningen av reglerna när man behöver dem. Andraderivatan ger dig en snabb och säker metod för att bestämma extrempunkters karaktär: max-, min- eller terrasspunkt.

Derivatan av logaritmfunktionen härleds och tillämpas här. Om $f(x) = \ln x$ så är funktionens derivata $f'(x) = 1/x$. Det finns ju andra logaritmer än den *naturliga logaritmen*, $\ln x$. Vi har ju även tio-logaritmen, $\lg x$. Hur skall den funktionen deriveras? Med sambandet (logaritmlagarna!) $\lg x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ får man (eftersom $\ln 10$ är en konstant)

$D(\lg x) = D\left(\dfrac{\ln x}{\ln 10}\right) = D\left(\dfrac{1}{\ln 10}\cdot \ln x\right) = \dfrac{1}{\ln 10}\cdot D(\ln x) = \dfrac{1}{\ln 10}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\cdot \ln 10}$. Alla logaritmfunktioner är "släkt med varandra" och skiljer sig bara med en konstant faktor. Exponentialfunktioner förhåller sig på samma sätt.

3.2 Derivator och grafer

Vad säger förstaderivatan om grafen?
Här får du lära dig hur man med hjälp av derivator kan undersöka en kurvas utseende. Tecknet (+ eller -) för derivatan $f'(x)$ avgör om funktionen är växande (om x ökar så ökar $f(x)$) eller avtagande (om x ökar så minskar $f(x)$).

Derivatans tecken	**Funktionen är**	**Tangentens riktningskoefficient**
positiv	växande	positiv
negativ	avtagande	negativ

För det x där derivatan $f'(x) = 0$ har funktionen $f(x)$ en lokal maximipunkt, lokal minimipunkt eller en terrasspunkt. Genom att undersöka tecknet på derivatan kring detta x-värde kan man ta reda på vilken typ av punkt det är.

Teckenväxling	**Punkt**
+ 0 -	lokal maximipunkt
- 0 +	lokal minimipunkt
+ 0 + , - 0 -	terrasspunkt

Då koordinaterna efterfrågas för funktionens extremvärden och/eller terrasspunkter gör man så här:

- x-koordinaten är det x för vilket $f'(x) = 0$,
- y-koordinaten är det värde du får då du sätter in x-koordinaten i $f(x)$.

Ibland efterfrågas funktionens största och minsta värde inom ett givet intervall. Då måste även $f(x)$ på intervallgränserna beräknas eftersom dessa funktionsvärden kan vara större än lokala maxima eller mindre än lokala minima i intervallet.

Vad säger andraderivatan om grafen?
Andraderivatan ger en snabb och ofta säker metod för att analysera extrempunkternas karaktär:

Andraderivatan	**Punkt**	
$f''(x) < 0$	lokal maximipunkt	
$f''(x) > 0$	lokal minimipunkt	
$f''(x) = 0$	trolig terrasspunkt.	För att vara säker måste man undersöka förstaderivatans teckenväxlingar (se ovan).

När du arbetat dig igenom detta är det dags att göra test 3:1 och därefter studiearbete 3.

Plats för egna anteckningar och frågor

Studieenhet Derivator

3.3 Från derivata till funktion

Här har du god användning av dina kunskaper i ”deriveringskonsten”. En *primitiv funktion* är nämligen helt enkelt den funktion som fanns ”före” den nu givna funktionen, om man tänker sig att den senare uppkommit genom derivering av en (primitiv) funktion. På engelska kallas dessa primitiva funktioner för ”antiderivative” som tydligt uttrycker att det är en omvänd process till deriveringen (eng. derivative).

Öva flitigt och kontrollera dina resultat genom att derivera din funna primitiva funktion (eller funktioner). Man får alltså inte full visshet om hur den tänkta ursprungsfunktionen sett ut. Det beror på att (adderade) konstanter har derivatan = 0 och alltså ’försvinner’ vid derivering. Detta kompenserar man genom att lägga till en *godtycklig konstant* till den funna primitiva funktionen för att kunna beskriva alla tänkbara lösningar.

Exempel: Sök alla primitiva funktioner till $f(x) = \cos x$
Lösning: $F(x) = \sin x + C$ där C är en godtycklig konstant.

3.4 Integraler

Upplysningstidens kanske största matematiska upptäckt var sambandet mellan integraler - t.ex. arean som avgränsas av en funktionskurva och x-axeln - och den primitiva funktionen till den avgränsande funktionen. Det sammanfattas i den kraftfulla och praktiska formeln:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Formeln har många tillämpningar.

På sidorna 159 – 173 finns gott om övningar. Du får också lära att en integral kan ha negativt värde, t.ex. om begränsningskurvan ligger under positiva x-axeln. Om man vill beräkna (den vanliga geometriska) arean av ett sådant område, måste man alltså byta tecken på integralens värde.

Numeriska metoder

Eftersom många matematiska problem innebär många, långa och besvärliga beräkningar och ibland saknar analytiska lösningar har man stor nytta av datorer som utför sådant räknearbete. Här beskrivs några numeriska metoder för ekvationslösning och integralberäkning.

Nu är det dags att göra test 3:2 och studiearbete 4

Plats för egna anteckningar och frågor

Studieenhet Projektarbete

Det sista studiearbetet är ett självständigt projektarbete i matematik. **Gör någon eller några av bokens uppgifter i kapitel 4som träning och därefter ett projektarbete som utgör det sista av kursens fem studiearbeten.** Tag kontakt med din lärare för att komma överens om en lämplig uppgift för dig. Du behöver bara göra *en* av de uppgifter vi föreslår. Projektarbetet måste vara granskad och godkänd av din handledare, innan du får betyg från kursen.

Anmäl dig till den avslutande examinationen och repetera sedan kursen med hjälp av lite blandade övningar.

OBS! Alla studiearbeten skall vara godkända innan du kan delta i examinationen!

Plats för egna anteckningar och frågor